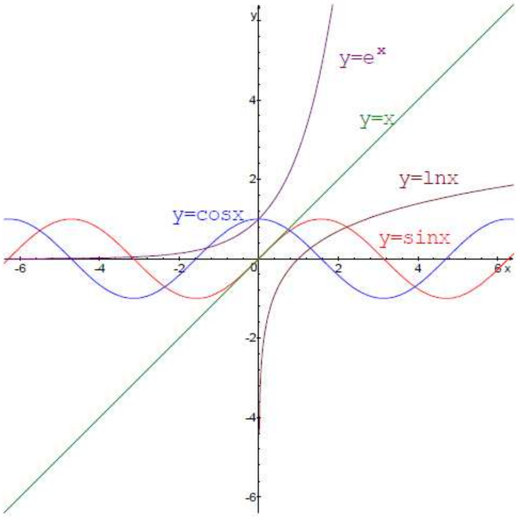
Funkce



1. **Definice** definiční obor, obor hodnot, graf,...

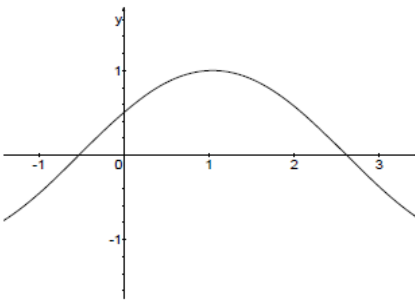
> **Funkce** f na množině $A \subset \mathbf{R}$ je předpis, který každému číslu z množiny A přiřadí právě jedno reálné číslo. Množina A se nazývá **definiční obor funkce**.
>
> Označení $D(f), D_f$.
>
> **Obor hodnot** funkce f je množina všech $y \in \mathbf{R}$, ke kterým existuje aspoň jedno x z definičního oboru funkce f tak, že $y = f(x)$.
>
> Označení $H(f), H_f$.

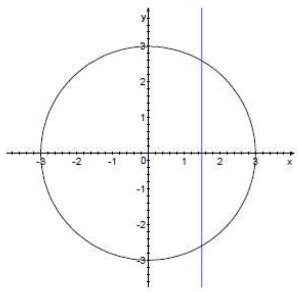
$y = f(x)$ je **funkční předpis** vyjadřující závislost y na x.

x je **nezávisle** proměnná, nebo také používáme označení **argument**, vybíráme ji z $D(f)$.

y je **závisle** proměnná, $y \in H(f)$.

Hodnotu funkce f v bodě x_0 označíme $f(x_o) = y_o$ a nazývá se **funkční hodnota** v x_0.





Určení definičního oboru: Je-li funkce zadaná funkčním předpisem $y = f(x)$ a není-li zároveň uveden definiční obor funkce, pak se jim rozumí nejširší možný obor, v němž má výraz $f(x)$ smysl. Ve funkčním předpisu nás budou zajímat následující možnosti:

- Je-li ve funkčním předpisu *zlomek*, musí být jmenovatel různý od nuly (pozor na funkce tan a cotg)
- Je-li ve funkčním předpisu *sudá odmocnina*, výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule (nezáporný).
- Je-li ve funkčním předpisu *logaritmus*, argument musí být větší než nula (kladný).

Úlohy vedou na *řešení nerovnic a jejich soustav*!

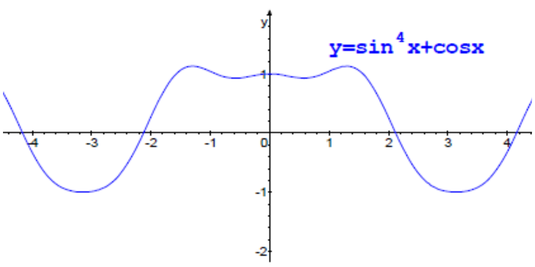
Příklady: $y = \ln(1-2x)$, $y = \tan(3x + \frac{\pi}{4})$, $y = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-1}}$

2. **Vlastnosti** (souměrnost grafu, monotonie, ohraničenost, periodicita)

Funkce f se nazývá **sudá**, právě když zároveň platí:

1. Pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$.
2. Pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = f(x)$.

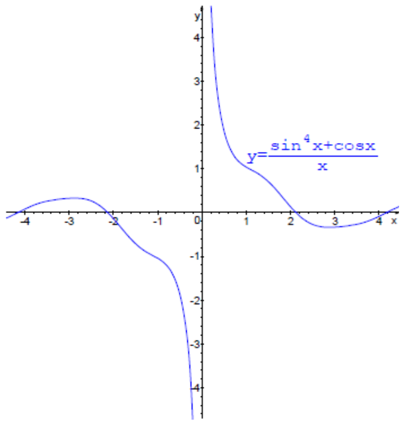
Graf sudé funkce je souměrný podle osy y.



Funkce f se nazývá **lichá**, právě když zároveň platí:

1. Pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$.
2. Pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = -f(x)$.

Graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic



Je dána funkce f a interval I, který je částí jejího definičního oboru $(I \subset D(f))$.

Funkce f se nazývá **rostoucí na intervalu** I, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:
Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **klesající na intervalu** I, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:
Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **neklesající na intervalu** I, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:
Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \le f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **nerostoucí na intervalu** I, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:
Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Rostoucí a klesající funkce na I se souhrnně nazývají **ryze monotónní funkce** na $I \subset D(f)$.

Pokud neznáme graf funkce, tak nemáme dobrý prostředek na to jak zjistit monotonii funkce.

Funkce se nazývá **prostá**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:
Je-li $x_1 \ne x_2$, pak $f(x_1) \ne f(x_2)$.

Věta. *Funkce rostoucí nebo klesající na celém definičním oboru je prostá.*

3. **složené** funkce, **inverzní** funkce

Inverzní funkce k prosté funkci f je f^{-1}, pro kterou platí:

1. $D_{f^{-1}} = H_f$,

2. Každému $y \in D_{f^{-1}}$ je přiřazeno právě to $x \in D_f$, pro které je $f(x) = y$.

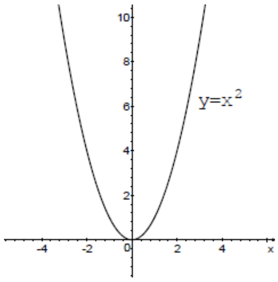
Oborem hodnot inverzní funkce je definiční obor původní funkce: $H_{f^{-1}} = D_f$

Grafy obou funkcí jsou souměrné podle osy I. a III. kvadrantu $y = x$.

Mocninné funkce:

Lineární funkcí je každá funkce na množině $\mathbb{R}$ ve tvaru $y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Definičním oborem a oborem hodnot jsou všechna reálná čísla. Grafem lineární funkce je přímka, a naopak, každá přímka je grafem nějaké lineární funkce. K sestrojení grafu nám tedy stačí 2 různé body.

- $a > 0$: funkce je rostoucí na $\mathbb{R}$, je prostá
- $a < 0$: funkce je klesající na $\mathbb{R}$, je prostá
- $a = 0$: konstantní funkce, grafem je rovnoběžka s osou *x*, funkce není prostá
- $b = 0$: přímá úměrnost – graf funkce prochází počátkem soustavy souřadnic



Kvadratickou funkcí rozumíme každou funkci na množině R, která je dána ve tvaru $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \in \mathrm{R} - \{0\}; b, c \in \mathrm{R}$.

Definičním oborem jsou všechna reálná čísla. Obor hodnot se liší podle zadání.

Všechny paraboly, pro které platí $a = 1$, mají stejný tvar, liší se pouze umístěním vzhledem k souřadnicovým osám: Grafy funkcí a) $y = x^2 + c$, b) $y = (x - k)^2$ se nakreslí posunutím grafu výchozí paraboly $y = x^2$ ve směru

a) osy *y* tak, že vrchol $V[0, 0]$ přejde do vrcholu $V'[0, c]$,

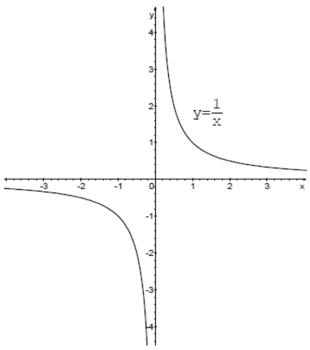
b) osy *x* tak, že vrchol $V[0, 0]$ přejde do vrcholu $V'[k, 0]$.

Převod na vrcholový tvar: Nakreslete graf funkce $y = 2x^2 - 4x - 6$.

Nepřímá úměrnost je každá funkce na množině $\mathbf{R} - \{0\}$ daná ve tvaru $y = \frac{k}{x}$, kde $k \in \mathbf{R} - \{0\}$.

Podíváme se podrobně na konstrukci grafu nepřímé úměrnosti pro $k = 1$.

x	1	2	0,5	4	0,1	-1	-2	-0,5	-4
$y = \frac{1}{x}$	1	0,5	2	0,25	10	-1	$-0{,}5$	-2	$-0{,}25$

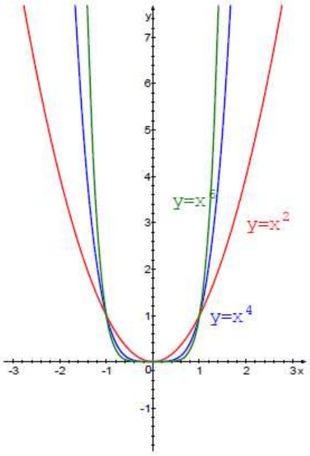


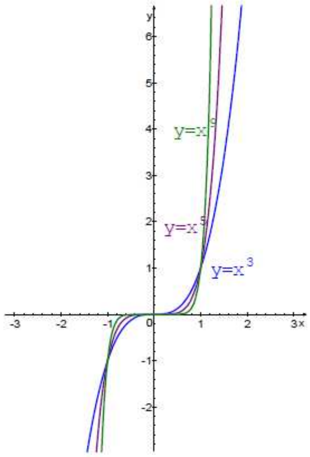
Grafem je rovnoosá hyperbola o středu [0,0], osy souřadnicového systému jsou její asymptoty (hyperbola se k těmto přímkám přibližuje, ale neprotne je ani se jich nedotkne). Graf nepřímé úměrnosti je souměrný podle počátku souřadnicového systému a funkce je tedy lichá.

Lineární lomená funkce je každá funkce na množině $\mathbf{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$, vyjádřená ve tvaru $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, kde $a,b,d\in\mathbf{R}; c\in\mathbf{R}-\{0\}$ a $ad-bc\neq 0$.

Mocninné funkce jsou definovány předpisem $y=x^n, n\in\mathbf{N}$ a $y=\frac{1}{x^n}, n\in\mathbf{N}$. Jiný zápis pro druhou variantu $y=x^n, n\in\mathbf{Z}^-$. ($\mathbf{Z}^-$ značí celá záporná čísla).

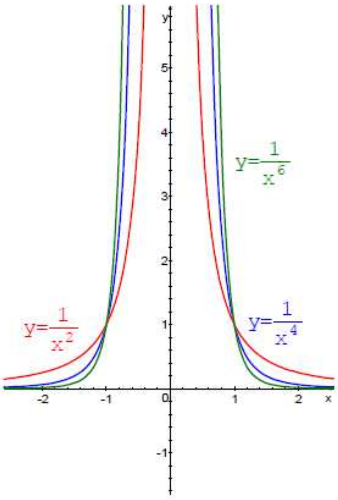
$y=x^n, n\in N$, n sudé n liché

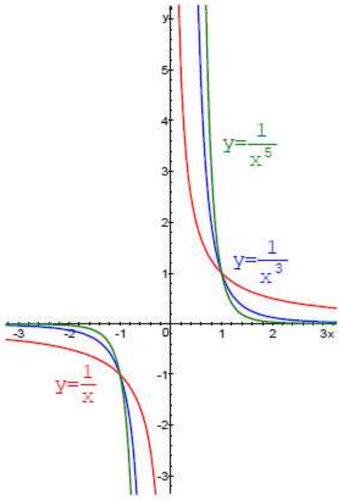




Definiční obor:	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
Obor hodnot:	$\langle 0,\infty)$	$\mathbf{R}$
Funkce	sudá	lichá
Klesající na	$(-\infty,0\rangle$	-----
Rostoucí na	$\langle 0,\infty)$	$\mathbf{R}$
Minimum:	$[0,0]$	nemá
Maximum:	nemá	nemá

$y=\frac{1}{x^n},\ n\in N$, n sudé | n liché





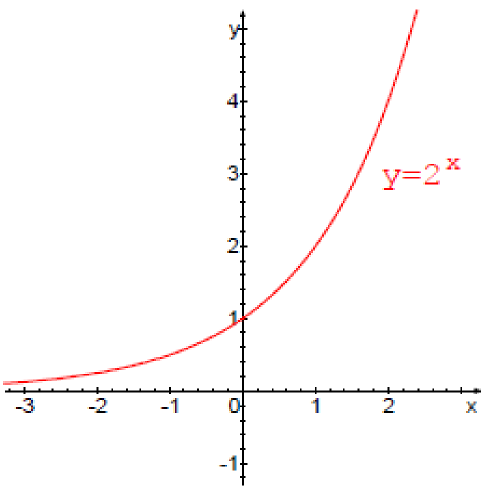
Definiční obor:	$\mathbf{R}-\{0\}$	$\mathbf{R}-\{0\}$
Obor hodnot:	$(0,\infty)$	$\mathbf{R}-\{0\}$
Funkce	sudá	lichá
Klesající na	$(0,\infty)$	$(-\infty,0),(0,\infty)$
Rostoucí na	$(-\infty,0)$	----
Minimum:	nemá	nemá
Maximum:	nemá	nemá

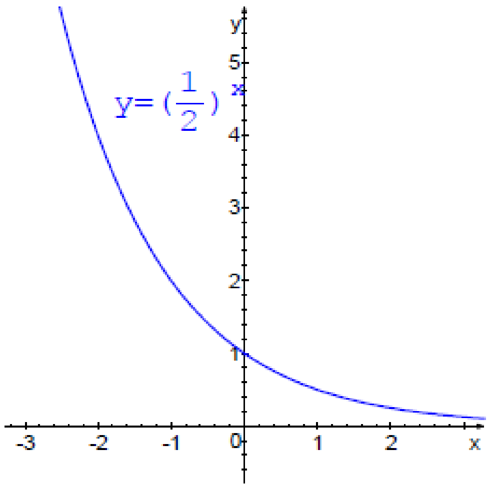
lineární, kvadratická, lineární lomená funkce, x^a, $a\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{Q}$, rozdíly pro sudé a liché *k*.

– Funkce $y=|x|$

Exponenciální funkce

$a>1$ | $0<a<1$





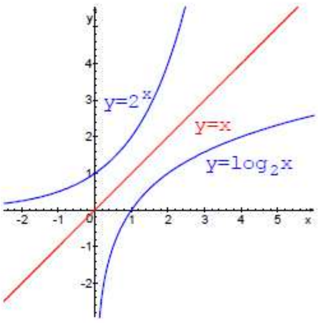
Gaussova křivka, exponenciální růst

Logaritmická funkce

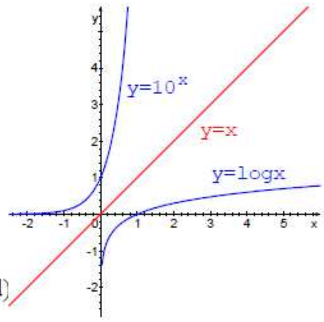
Logaritmická funkce o základu a je funkce inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$, kde a je libovolné kladné číslo různé od jedné, $a \in R^+ - \{1\}$.

Označení $y = \log_a x$ čteme logaritmus x o základu a.

a)



b)



d)

Pravidla pro počítání s logaritmy:

$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

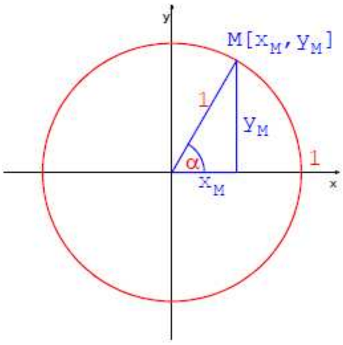
$\log_a x^n = n.\log_a x$

$\log_a a = 1$

$\log_a 1 = 0$

Goniometrické funkce

Goniometrické funkce obecného úhlu definujeme pomocí jednotkové kružnice. V kartézské soustavě souřadnic sestrojíme kružnici se středem v počátku a o poloměru jedna. Každému reálnému číslu α můžeme přiřadit orientovaný úhel velikosti α (v obloukové míře), jehož počáteční rameno je kladná poloosa x. Průsečík koncového ramene s kružnicí označme $M[x_M, y_M]$. Funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens definujeme takto:

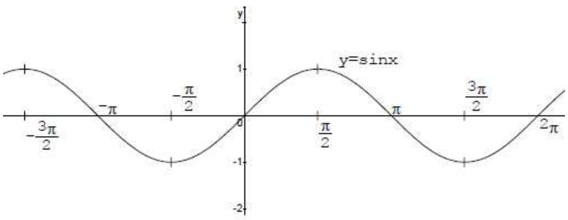


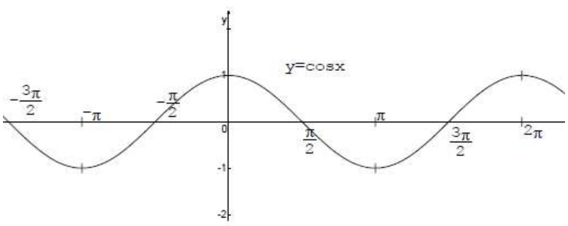
$\sin\alpha = y_M$

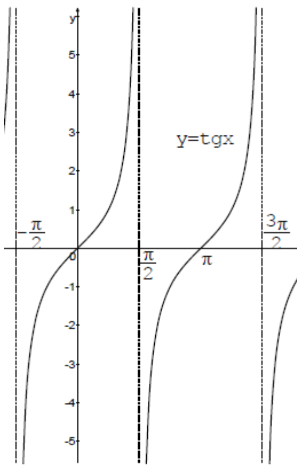
$\cos\alpha = x_M$

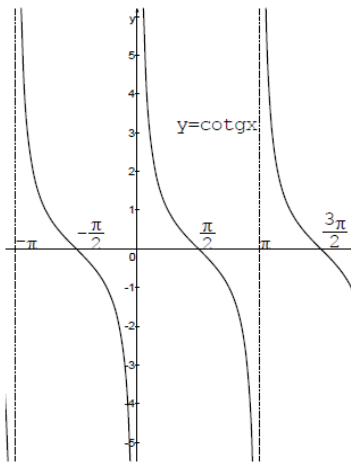
$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \cos\alpha \neq 0$

$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \ \sin\alpha \neq 0$









Znaménko funkce	I. kvadrant	II. kvadrant	III. kvadrant	IV. kvadrant
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-
$\operatorname{cotg} x$	+	-	+	-

Monotónnost funkce	I. kvadrant	II. kvadrant	III. kvadrant	IV. kvadrant
$\sin x$	roste	klesá	klesá	roste
$\cos x$	klesá	klesá	roste	roste
$\operatorname{tg} x$	roste	roste	roste	roste
$\operatorname{cotg} x$	klesá	klesá	klesá	klesá

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°
x rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.
$\operatorname{cotg} x$	nedef.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Stupně a radiány: rozdělení kružnice na 360 dílků = stupňů, vs. délka oblouku odpovídající danému úhlu, souvislost se vzorcem pro obvod kružnice $o = 2\pi r$.
definice pomocí pravoúhlého trojúhelníku a užitím jednotkové kružnice, tabulkové hodnoty v obloukové a stupňové míře, grafy, def. obory,
vztahy mezi goniometrickými funkcemi: základní goniometrické vzorce, vzorce pro dvojnásobný a poloviční argument, součtové vzorce, \dots.

Určování jejich předpisů, sestrojení grafů, vlastnosti, grafy s absolutní hodnotou. Převod na vrcholový (resp. středový) tvar. Souvislost nulových bodů funkce a kořenů příslušné rovnice.