Definice 7.1.1.

Rovnice tvaru $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \cdots, y', y, x) = 0$ se nazývá **diferenciální rovnice n-tého řádu** pro funkci $y = y(x)$. Speciálně je

$$F(y', y, x) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad y' = f(x, y)$$

diferenciální rovnice prvního řádu.

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace hledané funkce $y(x)$.

Řešením diferenciální rovnice je každá funkce, která rovnici vyhovuje (na zadané množině).

Graf konkrétního řešení rovnice se nazývá **integrální křivka**.

Výklad

V následujícím výkladu se budeme věnovat pouze rovnicím prvního řádu. Rovnici považujeme za vyřešenou, známe-li všechna její řešení. Ta rozdělujeme do několika typů:

- **obecné řešení** rovnice 1. řádu představuje množinu funkcí tvaru

$$\phi(x, y, C) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad y = \varphi(x, C)\,;$$

- **partikulární řešení** je konkrétní funkce získaná z obecného řešení volbou nebo výpočtem konstanty C;
- **výjimečné řešení** nelze získat z obecného pro žádnou hodnotu C; existuje pouze u některých typů rovnic a v tomto textu se jím nebudeme až na výjimky zabývat.

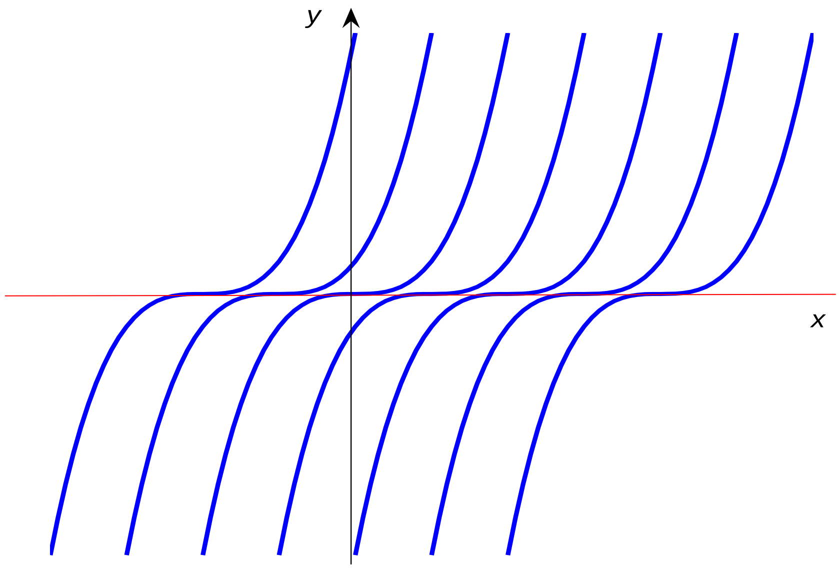
Cíle

Naše nejbližší cíle spočívají v odpovědích na základní otázky, které si klademe v souvislosti s diferenciálními rovnicemi:

1. Má rovnice řešení?
2. Kolik je řešení a jakého jsou typu?
3. Jak se tato řešení najdou?

Věta 7.2.1.

Nechť je dána rovnice $y' = f(x, y)$ a bod $A = [x_0, y_0]$. Je-li funkce (dvou proměnných) $f(x, y)$ spojitá v bodě A a určitém jeho okolí, pak v tomto okolí existuje řešení rovnice $y' = f(x, y)$, které splňuje podmínku $y(x_0) = y_0$. Je-li spojitá také derivace $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, pak je řešení právě jediné.



Obr. 7.2.2. Integrální křivky řešení příkladu 7.2.2. Jedná se o kubické paraboly pro $C = -2, -1, \ldots, 4$ a osu x jako graf výjimečného řešení.

8. Metody řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

8.1. Separovatelné rovnice

Cíle

V předchozí kapitole jsme poznali separovaný tvar diferenciální rovnice, který bezprostředně umožňuje nalézt řešení integrací. Existuje široká skupina úloh, které jsou na takový tvar převoditelné buď jednoduchými úpravami v rovnici nebo vhodnou substitucí. Označují se jako **separovatelné rovnice** a nyní se seznámíme se třemi nejčastějšími typy:

a) $y' = P(x).Q(y)$ (základní tvar separovatelné rovnice),

b) $y' = f(ax + by + c)$,

c) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (homogenní rovnice).

8.1.1. Základní typ

Výklad

U tohoto typu, který zapisujeme obvykle ve tvaru $y' = P(x).Q(y)$, postačuje k separaci jednoduchá úprava rovnice (využijeme identity $y' = dy/dx$):

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x)\,dx\,,$$

po níž může hned následovat integrace.

Příklad 8.1.1. Najděte řešení rovnice $y' = -y.\mathrm{cotg}x$.

8.1.2. Rovnice typu $y' = f(ax + by + c)$

Výklad

Uvědomme si nejprve, že $y = y(x)$. Tuto rovnici lze tudíž pro libovolné konstanty a, $b \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ transformovat na jednodušší separovatelnou rovnici substitucí

$$ax + by + c = z(x)\,.$$

Derivováním tohoto vztahu podle x dostáváme

$$a + by' = z'\,, \qquad \text{odkud} \qquad y' = \frac{z' - a}{b}\,, \text{ kde } z' = \frac{dz}{dx}\,.$$

Po dosazení do původní rovnice vychází postupnými úpravami

$$\frac{z' - a}{b} = f(z) \quad \Longrightarrow \quad z' = a + bf(z) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{a + bf(z)} = dx\,.$$

Výsledkem je rovnice se separovanými proměnnými, v níž lze již pokračovat integrací.

Příklad 8.1.3. Řešte rovnici $y' \quad y + 3x = 5$.

8.1.3. Homogenní rovnice

Výklad

Diferenciální rovnici nazýváme homogenní, lze-li ji upravit na tvar

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)\,.$$

Řešíme ji převedením na separovatelnou rovnici substitucí

$$\frac{y}{x} = z(x) \quad \Longrightarrow \quad y = zx \quad \Longrightarrow \quad y' = z'x + z\,.$$

Zároveň je vhodné připomenout, že funkce $f(x, y)$ se na oblasti $\Omega \in \mathbb{R}$ nazývá ***homogenní stupně k****, jestliže pro libovolné $t = 0$ platí*

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)\,.$$

Doporučujeme povšimnout si této vlastnosti u členů v rovnicích uvedených níže (např. členy rovnice v následující úloze jsou homogenní stupně 2).

Příklad 8.1.5. Určete obecné řešení rovnice $(2xy - x^2)y' = 3y^2 - 2xy$.

8.3. Lineární diferenciální rovnice

Cíle

Přehled základních typů diferenciálních rovnic prvního řádu zakončíme pojednáním o lineárních rovnicích, které patří v praktických úlohách k nejfrekventovanějším. Ukážeme například, že

– jejich řešení má předem danou pevnou strukturu,
– řešení lze zapsat v obecném uzavřeném tvaru (na rozdíl od jiných typů rovnic),
– postupy při jejich řešení mají určité univerzální rysy, které lze uplatnit i u lineárních rovnic vyšších řádů.

Výklad

Definice 8.3.1.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR) je každá rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x)\,,$$

kde $p(x)$, $q(x)$ jsou funkce spojité na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, v níž hledáme řešení. Je-li $q(x) = 0$ na M, nazývá se

$$y' + p(x)y = 0$$

zkrácenou lineární rovnicí nebo také rovnicí **bez pravé strany**. V opačném případě hovoříme o **úplné lineární rovnici**.

Věta 8.3.1.

Zkrácená lineární rovnice má obecné řešení

$$\hat{y}(x) = C.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}\,.$$

Věta 8.3.2.
Obecné řešení úplné lineární rovnice má obecné řešení

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x)\,,$$

kde $\hat{y}(x)$ je řešení zkrácené rovnice a $v(x)$ je libovolné řešení úplné lineární rovnice.

metoda variace konstanty. Její princip spočívá v realizaci předpokladu, že řešení zkrácené rovnice

$$\hat{y}(x) = C.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

bude vyhovovat rovnici úplné, jestliže nahradíme konstantu C vhodnou funkcí, kterou určíme výpočtem. Budeme tedy předpokládat, že

$$y(x) = C(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

je hledaným řešením a dosadíme tuto funkci do úplné rovnice:

$$\underbrace{C'(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} - C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}.p(x)}_{y'(x)} + \underbrace{C(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}}_{y(x)}.p(x) = q(x)\,.$$

Na levé straně se odečtou členy obsahující funkci $C(x)$, takže zůstane pouze vztah

$$C'(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} = q(x)\,, \qquad \text{odkud} \qquad C'(x) = q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}\,.$$

Finální tvar funkce $C(x)$ stanovíme opět integrací:

$$C(x) = \int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} + K$$

Příklad 8.3.1. Najděte obecné řešení rovnic $xy' - y = 2x^3$.

Shrnutí lekce

Úvodní 7. kapitola přinesla informace o druzích řešení diferenciálních rovnic prvního řádu a stručné teoretické poznatky o podmínkách existence a jednoznačnosti řešení:

1. diferenciální rovnici prvního řádu můžeme psát v jednom z tvarů

$$y' = f(x, y)\ , \qquad F(y', y, x) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0\ ;$$

2. počáteční úlohou rozumíme zadání, v němž je diferenciální rovnice doplněna podmínkou $y(x_0) = y_0$, na jejímž základě určíme, které partikulární řešení z množiny funkcí představujících řešení obecné prochází bodem $[x_0, y_0]$;

3. je-li rovnice ve tvaru $y' = f(x, y)$, pak její řešení existuje na každé množině, kde je funkce $f(x, y)$ spojitá; je-li navíc spojitá parciální derivace $f'_y(x, y)$, je řešení jednoznačné.

V kapitole 8 jsme poznali nejčastější typy rovnic prvního řádu a metody jejich řešení. Stručnou rekapitulaci představuje následující tabulka.

Rovnice	Typický tvar	Metoda řešení
separovatelná	$y' = P(x).Q(y)$	přímá separace proměnných
separovatelná	$y' = f(ax + by + c)$	separace po substituci $ax + by + c = z$
homogenní	$y' = f(\frac{y}{x})$	separace po substituci $\frac{y}{x} = z$
exaktní	$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, je-li $P'_y = Q'_x$	určení kmenové funkce
lineární	$y' = P(x)y + Q(x)$	variace konstanty

9. Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Definice 9.1.1.

Lineární diferenciální rovnice (LDR) **druhého řádu** má tvar

$$a_2(x).y''(x) + a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = b(x) \ ,$$

kde funkce (nebo konstanty) $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ jsou **koeficienty rovnice** a funkci $b(x)$ nazýváme **pravou stranou** rovnice. Je-li na nějakém intervalu $b(x) = 0$, jedná se o **zkrácenou** (**homogenní**) LDR, je-li $b(x) \neq 0$, hovoříme o rovnici **nezkrácené** (**úplné**).

Definice 9.1.2.

Počáteční úlohou pro rovnici $a_2(x).y'' + a_1(x).y' + a_0(x).y = b(x)$ nazýváme zadání najít takové řešení $y(x)$ této rovnice, které splňuje podmínky

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \ .$$

Definice 9.1.3.

Výraz $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ nazýváme **lineární kombinací** funkcí $y_1(x)$, $y_2(x)$ s koeficienty C_1, C_2.

Řekneme, že funkce $y_1(x)$, $y_2(x)$ jsou na intervalu $\langle a, b\rangle$ **lineárně závislé**, existují-li takové konstanty C_1, C_2, z nichž alespoň jedna je nenulová, že platí

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0 \ .$$

V opačném případě řekneme, že funkce jsou **lineárně nezávislé**.

Věta 9.1.2.

Je-li v některém bodě $x \in \langle a, b\rangle$ determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

různý od nuly, jsou funkce $y_1(x)$, $y_2(x)$ na tomto intervalu lineárně nezávislé. Determinant $W(x)$ se nazývá **Wronského determinant** nebo zkráceně **wronskian** této dvojice funkcí.

Věta 9.1.3.

Jsou-li $y_1(x),\ y_2(x)$ dvě lineárně nezávislá řešení zkrácené rovnice

$$a_2(x).y''(x) + a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = 0 ,$$

má její obecné řešení tvar $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, kde $C_1,\ C_2$ jsou libovolné konstanty.

Výklad

Požadavek lineární nezávislosti dvojice funkcí $y_1(x),\ y_2(x)$ v obecném řešení je podstatný, neboť jen v takovém případě můžeme jejich lineární kombinací vyjádřit libovolná další řešení. Každá taková dvojice lineárně nezávislých řešení se nazývá **fundamentální systém řešení** této rovnice.

9.2. Zkrácená lineární rovnice s konstantními koeficienty

Zaměříme se na **zkrácené rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty**, jejichž obecný tvar je

$$a_2\ y''(x) + a_1\ y'(x) + a_0\ y(x) = 0 ,$$

kde $a_0,\ a_1,\ a_2$ jsou reálné koeficienty. Ukážeme nejprve zásadní skutečnost, že existují řešení této rovnice ve tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^{rx} ,$$

kde r je zatím nespecifikovaná konstanta. Snadno určíme derivace

$$y'(x) = r\mathrm{e}^{rx} , \quad y''(x) = r^2\mathrm{e}^{rx} ,$$

které dosadíme do původní rovnice. Po vydělení výrazem e^{rx} dostáváme

$$a_2\ r^2 + a_1\ r + a_0 = 0 ,$$

což je kvadratická rovnice pro neznámou r. Tento výsledek znamená, že funkce $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ bude řešením diferenciální rovnice právě tehdy, když r bude řešením příslušné algebraické rovnice.

Definice 9.2.1.

Kvadratickou rovnici $a_2\ r^2 + a_1\ r + a_0 = 0$ nazýváme **charakteristickou rovnicí** diferenciální rovnice $a_2\ y''(x) + a_1\ y'(x) + a_0\ y(x) = 0$.

Věta 9.2.1.

Mějme lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2\ y''(x) + a_1\ y'(x) + a_0\ y(x) = 0\ ,$$

s charakteristickou rovnicí $\quad a_2\ r^2 + a_1\ r + a_0 = 0.$

(a) Má-li charakteristická rovnice dva různé reálné kořeny $r_1,\ r_2$, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x},\ y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}\ , \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

(b) Má-li charakteristická rovnice dvojnásobný reálný kořen r, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{rx},\ y_2 = x\mathrm{e}^{rx}$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{rx} + C_2 x \mathrm{e}^{rx} = \mathrm{e}^{rx}\left(C_1 + C_2 x\right)\ , \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

(c) Má-li charakteristická rovnice komplexní kořeny $r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x,\ y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x\ + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x\ , \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

9.3. Úplná lineární rovnice s konstantními koeficienty

Věta 9.3.1.

Obecné řešení úplné lineární rovnice druhého řádu

$$a_2(x)\ y''(x) + a_1(x)\ y'(x) + a_0(x)\ y(x) = b(x)$$

má tvar

$$y(x) = \tilde{y}(x) + v(x)\ ,$$

kde $\tilde{y}(x)$ je obecné řešení zkrácené rovnice a $v(x)$ je libovolné řešení (tzv. **partikulární integrál**) úplné rovnice.

Příklad 9.3.2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

Řešení:

1. Charakteristická rovnice $r^2 - 2r + 1 = 0$ má dvojnásobný kořen $r = 1$, což vede k fundamentálnímu systému $y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x$.

2. Wronskian a odvozené determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \ ,$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \dfrac{e^x}{x^2+1} & (x+1)e^x \end{vmatrix} = -\frac{xe^{2x}}{x^2+1} \ ,$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^x}{x^2+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x^2+1} \ .$$

Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,dx = -\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + K_1 \ ,$$

$$C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + K_2 \ .$$

3. Výsledné řešení opět podle obecné formule $(*)$:

$$y(x) = e^x(K_1 + K_2 x) - \frac{1}{2}e^x \ln(x^2+1) + xe^x \operatorname{arctg} x \ .$$

9.4. Rovnice se speciální pravou stranou

Konstanty, které jsme určovali v předchozích příkladech, byly v podstatě koeficienty polynomů (samotnou konstantu můžeme pokládat za polynom nultého stupně). Odtud pochází nejčastěji užívaný název tohoto postupu – **metoda neurčitých koeficientů**. Její základní variantu lze formulovat takto:

má-li pravá strana lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvar

$$b(x) = e^{\lambda x}\left(p_m(x)\cos\omega x + q_n(x)\sin\omega x\right) \ ,$$

kde $p_m(x)$, $q_n(x)$ jsou polynomy stupňů m, n se zadanými koeficienty, volíme partikulární integrál ve tvaru

$$v(x) = x^k e^{\lambda x}\left(P_M(x)\cos\omega x + Q_M(x)\sin\omega x\right) \ ,$$