2.1. Pojem Riemannova určitého integrálu

Definice 2.1.1.

Říkáme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $< a,b >$ integrovatelná (schopná integrace), je-li na něm ohraničená a aspoň po částech spojitá.

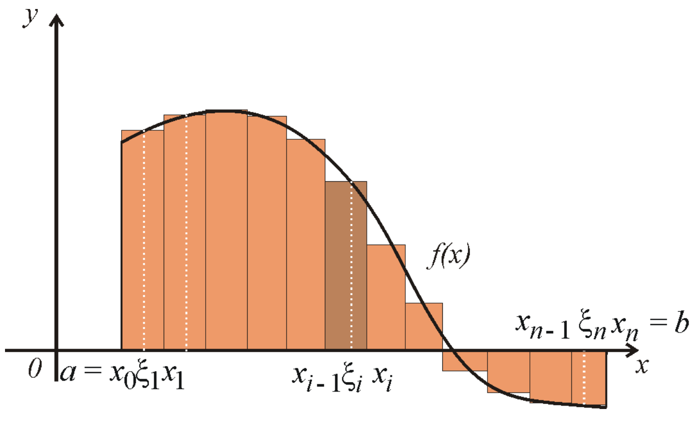
Definice 2.1.2.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< a,b >$, D_n je dělení intervalu $< a,b >$ a R_n výběr reprezentantů. Řekneme, že funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na intervalu $< a,b >$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbf{R}$ s vlastností

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, R_n) = I$$

pro libovolnou posloupnost dělení D_n, pro kterou platí $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ při libovolné volbě reprezentantů R_n. Číslo I nazýváme **určitý (Riemannův) integrál** funkce f na intervalu $< a,b >$ a píšeme $I = \int_a^b f(x)dx$.

Číslo a nazýváme **dolní mez**, číslo b **horní mez**, interval $< a,b >$ **integrační obor** a funkci f **integrand**.



Obr. 2.1.6. Integrální součet funkce *f*

Geometrický význam určitého integrálu

Je-li $f(x) \geq 0$ na intervalu $< a,b >$, pak $\int_a^b f(x)dx$ představuje obsah „křivočarého lichoběžníka“ ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou *x*.

*Výsledkem **neurčitého integrálu** je **funkce** (množina funkcí), výsledkem **určitého integrálu** je **číslo**. Přestože se jedná o zcela odlišné pojmy, existuje mezi nimi duležitá souvislost (veta 2.2.1).*

2.2. Výpočet a vlastnosti určitého integrálu

Věta 2.2.1. (Newtonova – Leibnizova formule)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $< a,b >$ a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $< a,b >$, pak

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Věta 2.2.2.

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $< a,b >$ a c je libovolná konstanta. Pak platí

a) $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx ,$$

b) $$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx .$$

Definice 2.2.1.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< a,b >$. Pak

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

Věta 2.2.3.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< a,b >$ a c je libovolné reálné číslo $a < c < b$. Pak je $f(x)$ integrovatelná na intervalech $< a,c >$ a $< c,b >$ a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

2.3. Metoda per partes pro určité integrály

Věta 2.3.1.

Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu $< a,b >$ spojité derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, pak platí

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx .$$

Poznámka

Praktické použití metody per partes je zcela analogické jako v případě neurčitého integrálu (kap. 1.3). Zejména platí návody, pro které funkce je metoda per partes vhodná.

2.4. Substituční metoda pro určité integrály

Věta 2.4.1. (Integrování substituční metodou $\varphi(x) = u$)

Nechť funkce $f(u)$ je spojitá na intervalu $<\alpha, \beta>$. Nechť funkce $u = \varphi(x)$ má spojitou derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu $<a, b>$ a nechť pro každé $x \in <a, b>$ platí $\alpha \le \varphi(x) \le \beta$, $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$ (tedy funkce φ zobrazuje interval $<a, b>$ na interval $<\alpha, \beta>$).

Potom platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u)du .$$

Poznámky

1. Při výpočtu určitého integrálu zavedeme vhodnou substituci $u = \varphi(x)$ a vypočteme diferenciál $du = \varphi'(x)dx$ jako u neurčitého integrálu. Navíc musíme ještě určit nové meze. „Staré“ meze a, b jsou pro původní proměnnou x. „Nová“ proměnná u bude mít meze $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$.

2. V řešených příkladech vyznačíme změnu mezí takto: $a \mapsto \varphi(a)$ (staré dolní mezi a odpovídá nová dolní mez $\varphi(a)$), resp. $b \mapsto \varphi(b)$ (staré horní mezi b odpovídá nová horní mez $\varphi(b)$).

3. V konkrétním případě se může stát, že $\varphi(a) > \varphi(b)$ (nová dolní mez je větší než mez horní). Podle definice 2.2.1 můžeme meze zaměnit a znaménko integrálu se změní na opačné. Pokud dostaneme $\varphi(a) = \varphi(b)$, je podle poznámky k definici 2.2.1 integrál roven nule a nemusíme dále počítat.

Integrace sudých nebo lichých funkcí

Věta 2.4.2. (Integrál sudé, popř. liché funkce)

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $<-a, a>$.

Je-li $f(x)$ na intervalu $<-a, a>$ sudá, pak

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx ,$$

Je-li $f(x)$ na intervalu $<-a, a>$ lichá, pak

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 .$$

3.1. Obsah rovinné oblasti

Věta 3.1.1.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< a,b >$ a je na něm nezáporná. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x platí

$$P = \int_a^b f(x)dx .$$

Věta 3.1.2.

Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné a platí $g(x) \le f(x)$ pro každé $x \in < a,b >$. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce $g(x)$, shora grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$ platí

$$P = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx .$$

Věta 3.1.3.

Nechť funkce f je dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ jsou spojité pro $t \in < \alpha, \beta >$. Je-li funkce $\varphi(t)$ ryze monotonní a má spojitou derivaci na intervalu $< \alpha, \beta >$, přičemž $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$, pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce f, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x platí

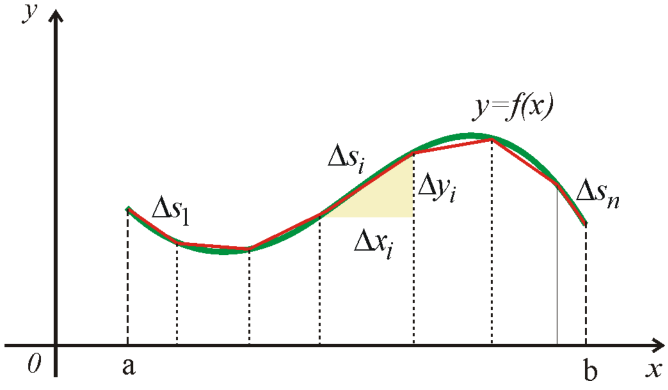
$$P = \left| \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \right| .$$

3.2. Délka oblouku křivky

Věta 3.2.1.

Nechť je funkce $f(x)$ definovaná na intervalu $< a,b >$ a má zde spojitou derivaci. Pak délka této křivky

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\,.$$



Obr. 3.2.1. Aproximace křivky $y = f(x)$ lomenou čarou

$$s = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\,.$$

Věta 3.2.2.

Nechť je křivka dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in < \alpha, \beta >$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $< \alpha, \beta >$. Pak je délka této křivky

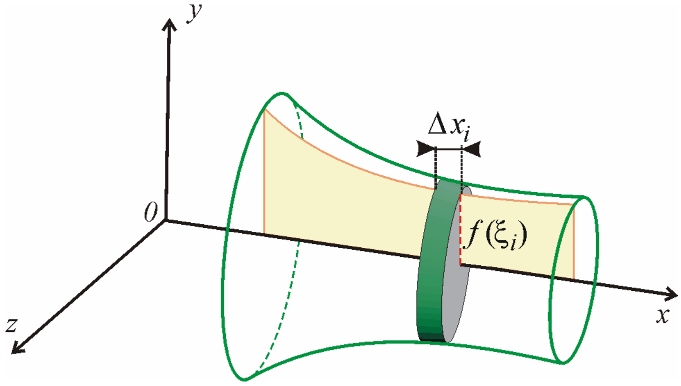
$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt\,.$$

3.3. Objem rotačního tělesa

Věta 3.3.1.

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $< a, b >$. Pak rotační těleso, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora funkcí $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ kolem osy x, má objem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx .$$



Obr. 3.3.2. Rozřezání tělesa na tenké plátky

Věta 3.3.2.

Nechť funkce f je dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in < \alpha, \beta >$, přičemž funkce $\varphi(t)$ má spojitou derivaci na intervalu $< \alpha, \beta >$ a funkce $\psi(t)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $< \alpha, \beta >$. Pak pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací elementární oblasti

$\varphi(\alpha) \le x \le \varphi(\beta)$, $\quad 0 \le y \le \psi(t)$,

kolem osy x, platí $\quad V = \int_\alpha^\beta \psi^2(t) |\varphi'(t)| dt .$

Pro výpočet objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $g(x) \le f(x)$ kolem osy x pro $x \in < a, b >$, použijeme vztah

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx - \pi \int_a^b g^2(x) dx = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx .$$

Často se setkáváme s chybou, kdy je umocněn rozdíl funkcí.

Vztah $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$ *je evidentně nesprávný!*