1.1. Primitivní funkce a neurčitý integrál

Definice 1.1.1.

Říkáme, že funkce $F(x)$ je v intervalu (a,b) **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$, platí-li pro všechna $x \in (a,b)$ vztah $F'(x) = f(x)$.

Definice 1.1.2.

Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu (a,b) se nazývá neurčitý integrál této funkce. Píšeme:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ .$$

1.2. Základní neurčité integrály

[1.]	$\int 0dx = C$	
[2.]	$\int 1dx = x + C$	
[3.]	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	pro $x > 0, \quad n \neq -1$
[4.]	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	pro $x \neq 0$
[5.]	$\int \sin x \ dx = -\cos x + C$	
[6.]	$\int \cos x \ dx = \sin x + C$	
[7.]	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	pro $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$
[8.]	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$	pro $x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$
[9.]	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	pro $x \in (-1,1)$
[10.]	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$	
[12.]	$\int e^x dx = e^x + C$	
[13.]	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	
[16.]	$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$	pro $a \neq 0$

Věta 1.2.1.

Mají-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu (a,b) primitivní funkce, pak platí:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \ , \ c = \text{konst.}$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

1.3. Integrace metodou per partes

Pro integrování součinu dvou funkcí $f(x)\cdot g(x)$ **obecně neplatí!!!**

$$\int f(x)\cdot g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

Avšak ze vztahu pro derivování součinu dvou funkcí

$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$ dostaneme $u'\cdot v = (u\cdot v)' - u\cdot v'$ a odtud integrováním

$$\int u'\cdot v\ dx = \int \left[(u\cdot v)' - u\cdot v'\right] dx = u\cdot v - \int u\cdot v' dx .$$

Věta 1.3.1. (Integrování per partes, čili po částech)

Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu (a,b) spojitou derivaci, pak v (a,b) platí

$$\int u'(x)\cdot v(x)\ dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx \ .$$

Jednoduché typy integrálů řešitelných metodou per partes.

Je-li $P(x)$ polynom stupně $n \geq 1$, pak u integrálů typu:

$$\int P(x)\sin x\ dx ,$$

$$\int P(x)\cos x\ dx ,$$

$$\int P(x)e^{x} dx ,$$

$$\int P(x)\,\mathrm{a}^{x}\ dx$$

položíme $v = P(x)$, takže $v' = P'(x)$, kdežto u integrálů typu:

$$\int P(x)\ln x\ dx ,$$

$$\int P(x)\operatorname{arctg} x\ dx ,$$

$$\int P(x)\arcsin x\ dx ,$$

$$\int P(x)\arccos x\ dx$$

položíme $u' = P(x)$, takže $u = \int P(x)dx$,

kde $P(x)$ je polynom stupně $n \geq 0$ (tedy i konstanta).

1.4. Integrace substitucí

Věta 1.4.1. (Integrování substituční metodou $\varphi(x) = u$)

Nechť $F(u)$ je primitivní funkce ke spojité funkci $f(u)$ na intervalu (α, β). Nechť má funkce $u = \varphi(x)$ derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu (a,b) a nechť pro každé $x \in (a,b)$ platí $\varphi(x) \in (\alpha, \beta)$. Potom je funkce $F(\varphi(x))$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na intervalu (a,b). Tedy platí

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du .$$

Substituce typu $\varphi(x) = u$

Máme vypočítat integrál typu $\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx$.

Jsou-li splněny předpoklady věty 1.4.1, položíme (provedeme substituci)

$\varphi(x) = u$. Diferencováním této rovnice dostaneme

$\varphi'(x)dx = du$. Daný integrál tedy převedeme na tvar

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du .$$

Postup bude úspěšný, pokud umíme vypočítat integrál $\int f(u)\,du$.

Věta 1.4.2 (Integrování substituční metodou $x = \varphi(t)$)

Nechť funkce $x = \varphi(t)$ zobrazující interval (α, β) na interval (a,b) je rostoucí, popř. klesající, na intervalu (α, β) a má tam spojitou derivaci $\varphi'(t) \neq 0$ a nechť funkce $t = \psi(x)$ je inverzní funkce k funkci $x = \varphi(t)$ na intervalu (a,b). Je-li $f(x)$ spojitá funkce na intervalu (a,b) a je-li $G(t)$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ na intervalu (α, β), potom pro všechna $x \in (a,b)$ platí

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = G(t) + C = G(\psi(x)) + C .$$

Substituce typu $x = \varphi(t)$

Máme vypočítat integrál typu $\int f\left(x\right)dx$.

Jsou-li splněny předpoklady věty 1.4.2, položíme (provedeme substituci)

$x = \varphi(t)$. Diferencováním této rovnice dostaneme

$dx = \varphi'(t)dt$. Daný integrál tedy převedeme na tvar

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt .$$

Postup bude úspěšný, pokud umíme vypočítat integrál $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

1.5. Integrace racionálních funkcí

Definice 1.5.1.

Polynomem $P_m(x)$ stupně *m* nazýváme funkci

$$P_m(x) = a_m x^m + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\,, \quad a_m \neq 0\,.$$

Reálná čísla $a_0,\ a_1\ ,\dots,\ a_m$ jsou koeficienty polynomu.

Číslo *m* nazýváme **stupněm polynomu** $P_m(x)$.

Definice 1.5.2.

Číslo α, pro které platí $Q_n(\alpha) = 0$, se nazývá **kořen polynomu** *Q* a výraz $x - \alpha$ se nazývá **kořenový činitel** polynomu *Q*.

Věta 1.5.3.

Každý polynom $Q_n(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ stupně $n \geq 1$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru:

$$Q_n(x) = a_n (x - \alpha_1)^{r_1}\ \dots\ (x - \alpha_u)^{r_u}\,(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}\ \dots\ (x^2 + p_v x + q_v)^{s_v}$$

se vzájemně různými reálnými kořeny $\alpha_i,\ i = 1, 2,\ \dots\ u$ a vzájemně různými kvadratickými polynomy $x^2 + p_j x + q_j,\ j = 1, 2,\ \dots\ v$, které nemají reálné kořeny.

Je zřejmé, že platí $n = r_1 + r_2 + \dots + r_u + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_v)$.

Definice 1.5.3.

Racionální funkcí *R(x)* nazveme funkci, která je podílem dvou polynomů $P_m(x)$ a $Q_n(x)$:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad Q_n(x) \neq 0\,.$$

Definice 1.5.4.

Racionální funkce $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ se nazývá **ryze lomená**, je-li stupeň *m* polynomu $P_m(x)$ menší než stupeň *n* polynomu $Q_n(x)$, tj. $m < n$. Je-li $m \geq n$, pak se funkce *R(x)* nazývá **neryze lomená** racionální funkce.

Věta 1.5.4.

Každou neryze lomenou racionální funkci můžeme vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce, tj. $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = P_{m_1}(x) + \dfrac{P_{m_2}(x)}{Q_n(x)}$, kde $m_2 < n$.

Definice 1.5.5.

Částečnými (parciálními) **zlomky** nazýváme racionální funkce tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)^{k_1}} \quad \text{nebo} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{k_2}} \quad ,$$

kde *A*, *M*, *N*, *p*, *q* jsou reálná čísla, k_1, k_2 jsou přirozená čísla a polynom x^2+px+q nemá reálné kořeny ($D = p^2 - 4q < 0$).

Poznámky

1. Parciální zlomky prvního typu odpovídají reálným kořenům jmenovatele a parciální zlomky druhého typu odpovídají dvojicím komplexně sdružených kořenů.

2. Ryze lomenou racionální funkci R(x) lze vyjádřit ve tvaru

$R(x) = R_1(x) + R_2(x) + \ldots + R_s(x)$, *kde* $R_1(x)$, $R_2(x)$, ... $R_s(x)$ *jsou parciální zlomky. Pro integraci ryze lomené racionální funkce stačí umět integrovat tyto parciální zlomky.*

A. Rozklad pro reálné různé kořeny polynomu $Q_n(x)$

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má *k* ($k \le n$) reálných různých kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ (jednoduché kořeny), pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků: $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{A_1}{x-\alpha_1} + \dfrac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \dfrac{A_k}{x-\alpha_k} + R_{k+1}(x) \ldots$,

kde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou reálné konstanty.

V případě reálných jednoduchých kořenů polynom $Q_n(x)$ dostaneme pouze integrály parciálních zlomků typu

$$\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A \ln|x-\alpha| + C \, .$$

B. Rozklad pro reálné násobné kořeny polynomu $Q_n(x)$

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má *r*-násobný ($r \le n$) kořen α, pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_1}{x-\alpha} + \frac{B_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{B_r}{(x-\alpha)^r} + R_{r+1}(x) + \ \ldots \ ,$$

kde $B_1, B_2, \ldots, B_r$ jsou reálné konstanty.

V případě reálných násobných kořenů polynomu $Q_n(x)$ dostaneme integrály parciálních zlomků typu

$$\int \frac{B_1}{x-\alpha}\,dx = B_1 \int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = B_1 \ln|x-\alpha| + C$$

a

$$\int \frac{B_k}{(x-\alpha)^k}\,dx = B_k \int (x-\alpha)^{-k}\,dx = \frac{B_k}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C, \text{ pro } k \ge 2.$$

C. Rozklad pro komplexně sdružené kořeny polynomu $Q_n(x)$

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má komplexně sdružené kořeny (jednoduché), pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x^2+px+q)Q_{n-2}(x)} = \frac{Mx+N}{x^2+px+q} + \dots ,$$

kde *M*, *N* jsou reálné konstanty.

Jestliže má polynom $Q_n(x)$ komplexně sdružené kořeny (jednoduché), dostaneme integrály parciálních zlomků typu

$$\int \frac{K(2x+p)}{x^2+px+q}\,dx = K \ln\left|x^2+px+q\right| + C$$

a

$$\int \frac{L}{x^2+px+q}\,dx = L \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C .$$

D. Rozklad pro násobné komplexně sdružené kořeny polynomu $Q_n(x)$

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má *k*-násobné komplexně sdružené kořeny, pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x^2+px+q)^k Q_{n-2k}(x)} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k} ,$$

kde $M_1, N_1, \dots, M_k, N_k$ jsou reálné konstanty.

1.6. Integrace goniometrických funkcí

Integrály typu $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ **Univerzální substituce** $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, $x \in (-\pi, \pi)$