6.3. Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

6.3.1. Definice

Definice

Lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty nazýváme rovnici tvaru

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

kde a_2, a_1, a_0 jsou konstanty a funkce $f(x)$ je spojitá v jistém intervalu *I*.

Je-li $f(x) = 0$, mluvíme o **zkrácené lineární diferenciální rovnici druhého řádu** s konstantními koeficienty.

6.3.2. Řešení zkrácené LDR II. řádu s konstantními koeficienty

Dá se dokázat, že partikulární řešení zkrácené lineární rovnice $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ má tvar $y = \mathrm{e}^{kx}$, kde k je reálné nebo komplexní číslo. Tato funkce a její derivace $y' = k\,\mathrm{e}^{kx}$, $y'' = k^2\,\mathrm{e}^{kx}$ musí danou rovnici splňovat

$$a_2 k^2\,\mathrm{e}^{kx} + a_1 k\,\mathrm{e}^{kx} + a_0\,\mathrm{e}^{kx} = 0,$$
$$a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0.$$

Číslo k, které určuje partikulární řešení, je kořen získané rovnice.

Definice

Algebraickou rovnici $a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0$ nazýváme **charakteristickou rovnicí** zkrácené lineární diferenciální rovnice.

Věta

Nechť zkrácená lineární diferenciální rovnice $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ má charakteristickou rovnici $a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0$, jejíž kořeny jsou k_1, k_2. Pak obecné řešení diferenciální rovnice je ve tvaru:

a) $y = C_1\,\mathrm{e}^{k_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{k_2 x}$, jestliže k_1, k_2 jsou reálné různé kořeny,

b) $y = C_1\,\mathrm{e}^{kx} + C_2 x\,\mathrm{e}^{kx}$, jestliže $k_1 = k_2 = k$ je dvojnásobný kořen,

c) $y = \mathrm{e}^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$, jestliže k_1, k_2 jsou komplexně sdružená čísla $k_{1,2} = a \pm ib$.

Příklad 13: Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $k^2 - 5k + 6 = 0$ má dva reálné různé kořeny $k_1 = 2, k_2 = 3$. Proto obecné řešení dané rovnice má tvar $y = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x}$

Příklad 14: Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $k^2 - 4k + 4 = 0$ má dvojnásobný kořen $k = 2$. Obecné řešení je $y = C_1\,e^{2x} + C_2\,x\,e^{2x}$.

Příklad 15: Řešte rovnici $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $k^2 + 2k + 5 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $k_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Obecné řešení rovnice má tvar $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

6.3.2. Řešení úplné lineární diferenciální rovnice II. řádu

Řešíme rovnici $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$.
K dané rovnici přiřadíme její zkrácenou a určíme řešení, které označíme y_0. Podle tvaru funkce $f(x)$ na pravé straně rovnice můžeme u některých speciálních případů určit tvar partikulárního řešení $\hat{y}(x)$ nezkrácené rovnice.

Věta

Obecné řešení rovnice $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ lze psát ve tvaru $y = y_0 + \hat{y}$, kde y_0 je řešení zkrácené rovnice a $\hat{y}(x)$ je nějaké partikulární řešení úplné rovnice.

Tvar partikulárního řešení $\hat{y}(x)$ závisí nejen na funkci $f(x)$, ale i na kořenech charakteristické rovnice. Speciální tvar pravé strany je $f(x) = e^{px}(P_n(x)\cos qx + Q_m(x)\sin qx)$, kde $P_n(x), Q_m(x)$ jsou polynomy n-tého a m-tého stupně.
Partikulární řešení má tvar

$$\hat{y} = x^r\, e^{px}(A_s(x)\cos qx + B_s(x)\sin qx),$$

kde $A_s(x), B_s(x)$ jsou polynomy s-tého stupně, číslo s je větší z čísel m, n a r je násobnost kořene $k_{1,2} = p \pm qi$ $(r = 0,1,2)$.

Nás budou převážně zajímat jednodušší speciální případy:

I. Funkce $f(x) = P(x)$ je polynom n-tého stupně.
a) Číslo $p = 0$ není kořenem charakteristické rovnice, pak partikulární řešení je $\hat{y} = Q(x)$.
b) Je-li číslo $p = 0$ r-násobným $(r = 1,2)$ kořenem charakteristické rovnice $(r = 0,1,2)$, pak partikulární řešení je $\hat{y} = x^r Q(x)$.
V obou případech je funkce $Q(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots$ polynom n-tého stupně. Koeficienty A, B, C, ... vypočteme po dosazení partikulárního řešení $\hat{y}$ a jeho derivací $\hat{y}', \hat{y}''$ do dané rovnice a porovnáním koeficientů u mocnin x.

II. Funkce $f(x) = m\,e^{px}$, kde m, p jsou konstanty
a) Není-li číslo p kořenem charakteristické rovnice, pak partikulární řešení má tvar $\hat{y} = A\,e^{px}$.
b) Je-li číslo p kořenem charakteristické rovnice s násobností $r = 1,2$, pak partikulární řešení má tvar $\hat{y} = Ax^r\, e^{px}$.
Konstantu A v obou případech vypočteme po dosazení funkcí $\hat{y}, \hat{y}', \hat{y}''$ do dané rovnice.

III. Funkce $f(x) = m\cos qx + n\sin qx$, kde m, n, q jsou konstanty.

a) Není-li číslo qi komplexním kořenem charakteristické rovnice, pak $\hat{y} = A\cos qx + B\sin qx$.

b) Je-li číslo qi komplexním kořenem charakteristické rovnice, pak $\hat{y} = x(A\cos qx + B\sin qx)$.

Po vypočtení neznámých konstant A, B,... v jednotlivých případech, máme určeno partikulární řešení $\hat{y}(x)$ a obecné řešení napíšeme ve tvaru $y = y_0 + \hat{y}$, kde y_0 je řešení zkrácené diferenciální rovnice.

Příklad 16: Řešte rovnici $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.

Řešení: Zkrácená rovnice je $y'' + 4y' + 5y = 0$, charakteristická rovnice je $k^2 + 4k + 5 = 0$ a její kořeny $k_{1,2} = -2 \pm i$.

Řešení zkrácené rovnice je

$y_0 = \mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

Charakteristická rovnice nemá nulový kořen, proto partikulární řešení má tvar

$$\hat{y} = Ax^2 + Bx + C,$$
$$\hat{y}' = 2Ax + B,$$
$$\hat{y}'' = 2A.$$

Dosazením funkce $\hat{y}$ a jejích derivací do dané úplné rovnice dostaneme rovnost dvou polynomů

$$2A + 8Ax + 4B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 5x^2 - 32x + 5.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} 5A &= 5, \\ 8A + 5B &= -32, \\ 2A + 4B + 5C &= 5. \end{aligned}$$

Odtud určíme

$A = 1$, $B = -8$, $C = 7$.

Partikulární řešení je

$\hat{y} = x^2 - 8x + 7$.

Obecné řešení dané diferenciální rovnice je

$y = \mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + x^2 - 8x + 7$.

Příklad 17: Vyřešte rovnici $y'' - y' = x^2 - 2x + 3$.

Řešení: Zkrácená rovnice: $y'' - y' = 0$, charakteristická rovnice:

$$\begin{aligned} k^2 - k &= 0, \\ k(k-1) &= 0, \\ k_1 = 0,\ k_2 &= 1. \end{aligned}$$

Řešení zkrácené rovnice: $y_0 = C_1 + C_2\mathrm{e}^x$.

Číslo $p = 0$ je jednoduchý kořen charakteristické rovnice, proto partikulární řešení má tvar

$$\hat{y} = x(Ax^2 + Bx + C),$$
$$\hat{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx,$$
$$\hat{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$
$$\hat{y}'' = 6Ax + 2B.$$

Dosadíme do zadání a určíme koeficienty:

$6Ax + 2B - 3Ax^2 - 2Bx - C = 3x^2 - 2x + 3$,

$$-3A = 3,$$
$$6A - 2B = -2,$$
$$2B - C = 3,$$
$$A = -1,\ B = 4,\ C = 5.$$

Partikulární řešení: $\hat{y} = -x^3 + 4x^2 + 5x$.

Obecné řešení: $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x - x^3 + 4x^2 + 5x$.

Příklad 18: Řešte rovnici $y'' - 2y' = 6\,\mathrm{e}^{3x}$.

Řešení: Zkrácená rovnice: $y'' - 2y' = 0$, charakteristická rovnice:

$$k^2 - 2k = 0,$$
$$k(k-2) = 0,$$
$$k_1 = 0,\ k_2 = 2.$$

Řešení zkrácené rovnice: $y_0 = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{2x}$.

Číslo $p = 3$ není kořenem charakteristické rovnice, proto partikulární řešení má tvar
$$\hat{y} = A\,\mathrm{e}^{3x},\quad \hat{y}' = 3A\,\mathrm{e}^{3x},\quad \hat{y}'' = 9A\,\mathrm{e}^{3x}.$$

Dosadíme do zadání a určíme koeficienty:

$$9A\,\mathrm{e}^{3x} - 6A\,\mathrm{e}^{3x} = 6\,\mathrm{e}^{3x}.$$

Rovnici zkrátíme e^{3x}:

$$3A = 6,$$
$$A = 2.$$

Partikulární řešení: $\hat{y} = 2\,\mathrm{e}^{3x}$.

Obecné řešení: $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{3x}$.

Příklad 19: Řešte rovnici $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}$.

Řešení: Zkrácená rovnice: $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Charakteristická rovnice: $k^2 + 4k + 4 = 0$, $k_{1,2} = -2$.

Řešení zkrácené rovnice: $y_0 = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Číslo $p = -2$ je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, proto partikulární řešení má tvar

$$\hat{y} = Ax^2\,\mathrm{e}^{-2x},$$
$$\hat{y}' = 2Ax\,\mathrm{e}^{-2x} - 2Ax^2\,\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}(2Ax - 2Ax^2),$$
$$\hat{y}'' = -2\,\mathrm{e}^{-2x}(2Ax - 2Ax^2) + \mathrm{e}^{-2x}(2A - 4Ax) = \mathrm{e}^{-2x}(4Ax^2 - 8Ax + 2A).$$

Dosadíme do zadání a určíme koeficienty:

$$\mathrm{e}^{-2x}(4Ax^2 - 8Ax + 2A) + \mathrm{e}^{-2x}(-8Ax^2 + 8Ax) + 4Ax^2\,\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}.$$

Rovnici zkrátíme e^{-2x} a určíme $A = \dfrac{1}{2}$.

Partikulární řešení: $\hat{y} = \dfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Obecné řešení: $y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Příklad 20: Řešte rovnici $y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x$.

Řešení: Zkrácená rovnice: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Charakteristická rovnice: $k^2 - 3k + 2 = 0$, $k_1 = 1, k_2 = 2$.

Řešení $y_0 = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{2x}$.

Číslo $q = 2i$ není kořenem charakteristické rovnice, proto partikulární řešení má tvar

$\hat{y} = A\sin 2x + B\cos 2x,$

$\hat{y}' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x,$

$\hat{y}'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x,$

$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 6A\cos 2x + 6B\sin 2x + 2A\sin 2x + 2B\cos 2x = 5\sin 2x$.

Porovnáme koeficienty, které jsou u funkce sin2x a u funkce cos2x:

$$\begin{aligned}
-4A + 6B + 2A &= 5 \\
\underline{-4B - 6A + 2B} &\underline{= 0} \\
-2A + 6B &= 5 \\
-6A - 2B &= 0 \\
\\
-20A &= 5 \\
A = -\frac{1}{4},\ B &= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Partikulární řešení: $\hat{y} = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x$.

Obecné řešení: $y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x$.

Příklad 21: Vyřešte rovnici $y'' + y = 4\sin x$.

Řešení: Zkrácená rovnice: $y'' + y = 0$.

Charakteristická rovnice: $k^2 + 1 = 0$, $k_{1,2} = \pm i$.

Řešení $y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Číslo $q = i$ je kořenem charakteristické rovnice, proto partikulární řešení má tvar

$\hat{y} = x(A\sin x + B\cos x),$

$\hat{y}' = A\sin x + B\cos x + x(A\cos x - B\sin x),$

$\hat{y}'' = A\cos x - B\sin x + A\cos x - B\sin x + x(-A\sin x - B\cos x),$

$2A\cos x - 2B\sin x - Ax\sin x - Bx\cos x + Ax\sin x + Bx\cos x = 4\sin x$.

Porovnáme koeficienty, které jsou u funkce sin x a u funkce cos x:

$A = 0$, $B = -2$.

Partikulární řešení: $\hat{y} = -2x\cos x$.

Obecné řešení: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x\cos x$.