Funkce dvou a více proměnných

1. Motivace

V praxi nevystačíme s funkcemi jedné proměnné, většina veličin závisí více než na jedné okolnosti, např.:

obsah obdélníka: $S(x,y) = x \cdot y$

kinetická energie: $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

ekonomika: $\text{plat} = F(v, p, f, p, \ldots)$

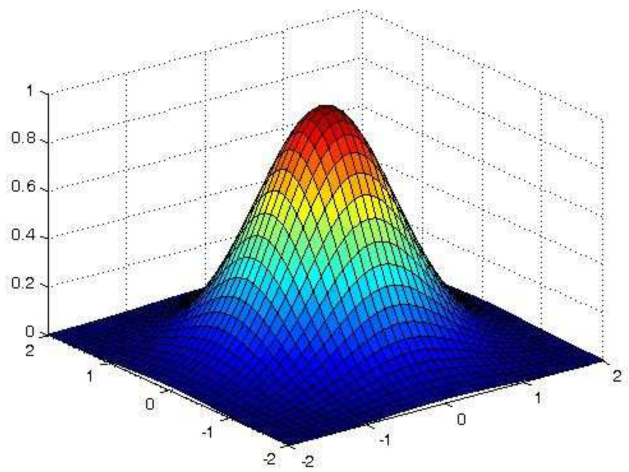
Analogicky zavádíme funkce $u = f(x, y, z)$, např. pro fyzikální veličiny v prostoru a $w = f(x, y, z, t)$ pro veličiny na prostoročasech v teorii relativity.

2. Definice

Nechť D je neprázdná množina bodů v rovině o souřadnicích [x, y] a H je neprázdná množina reálných čísel. ***Funkcí dvou reálných proměnných*** x *a* y nazýváme každé zobrazení f množiny D na množinu H.

Zápis funkce: $z = f(x, y)$, případně pouze $f(x, y)$ nebo $f : [x, y] \to z$ nebo $[x, y, z] \in f$.

Grafem funkce dvou proměnných rozumíme **plochu v prostoru** o souřadnicích [x, y, z], přičemž [x, y] nabývají všech hodnot z definičního oboru funkce.



Stejně jako u funkcí jedné proměnné může být **definiční obor** omezen v důsledku následujících podmínek:

1. jmenovatel zlomku nesmí být roven nule
2. sudou odmocninu lze udělat jen z nezáporného čísla
3. logaritmovat lze jen kladná čísla
4. argument funkcí arcsin a arccos musí ležet v intervalu $I = \langle -1,1 \rangle$

Příklad 6.1: Určete hodnotu funkce $z = 2 - x^2 - y^2$ v bodech $A[1, 1]$, $B[0, 1]$, $C[-1, 2]$ a $D[2, -2]$.

Řešení: Daná funkce je definována v celé rovině E_2. Funkční hodnoty v daných bodech získáme dosazením prvních souřadnic bodů za proměnnou x a jejich druhých souřadnic bodů za proměnnou y:

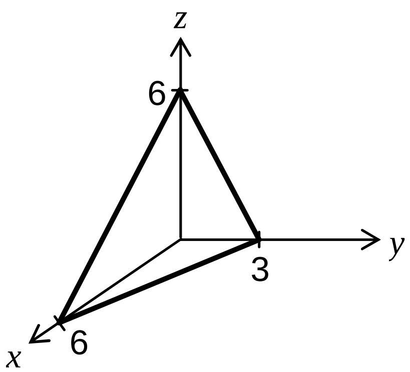
$z(A) = f(1, 1) = 2 - 1^2 - 1^2 = 0$, $\quad z(B) = f(0, 1) = 2 - 0^2 - 1^2 = 1$,

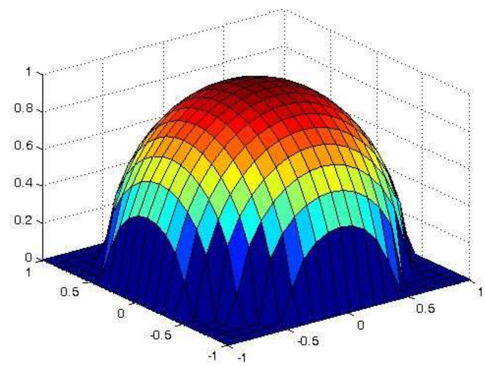
$z(C) = f(-1, 2) = 2 - (-1)^2 - 2^2 = -3$, $\quad z(D) = f(2, -2) = 2 - 2^2 - (-2)^2 = -6$.

Příklad 6.2: Určete definiční obor funkcí:

a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{\ln(x - 1)}$, b) $f(x, y) = \arcsin \dfrac{xy}{2}$, c) $f(x, y) = \dfrac{\ln(y^2 - 4x + 8)}{\sqrt{4 - x^2 - 2y^2}}$

Příklad 6.3: Načrtněte graf funkce: a) $z = 6 - x - 2y$, b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.





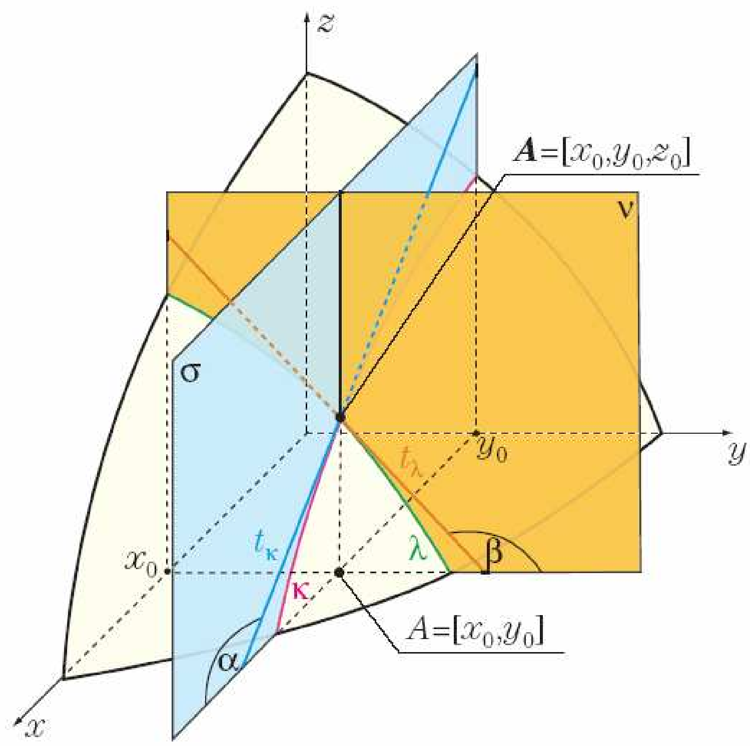
3. Parciální derivace

Parciální derivaci funkce $z = f(x, y)$ podle proměnné x určíme tak, že funkci derivujeme **pouze podle proměnné *x*** (jako funkci $z(x)$ jedné proměnné) a druhou proměnnou y považujeme za konstantu. Značíme ji symboly:

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$$

Parciální derivaci funkce $z = f(x,y)$ podle proměnné y určíme tak, že funkci derivujeme **pouze podle proměnné *y*** (jako funkci $z(y)$ jedné proměnné) a druhou proměnnou *x* považujeme za konstantu. Značíme ji symboly:

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$$



Geometrický význam parciálních derivací

Pro bod $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ na ploše $z = f(x,y)$ uvažujme jeho průmět $T = [x_0, y_0]$ do D. Pak tečna k řezu plochy $z = f(x,y)$ rovinou $y = y_0$ v bodě T má směrnici

$$k_x = \frac{\partial f(T_0)}{\partial x} \tag{1}$$

Podobně, tečna k řezu plochy $z = f(x,y)$ rovinou $x = x_0$ v bodě T má směrnici

$$k_y = \frac{\partial f(T_0)}{\partial y} \tag{2}$$

Příklad 6.5: Určete parciální derivace funkce $z(x,y) = 2 - 3x^2 + \ln y + 5xy^2$ v bodech A[1, 1] a B[0, 1].

Řešení: Daná funkce je definována pro $y > 0$, tedy v celé horní polorovině.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 - 6x + 0 + 5.1.y^2 = -6x + 5y^2$$

po dosazení souřadnic $\dfrac{\partial z(A)}{\partial x} = -6.1 + 5.1^2 = -1$, $\dfrac{\partial z(B)}{\partial x} = -6.0 + 5.1^2 = 5$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 0 + \frac{1}{y} + 5x.2y = \frac{1}{y} + 10xy$$

po dosazení souřadnic $\dfrac{\partial z(A)}{\partial y} = \dfrac{1}{1} + 10.1.1 = 11$, $\dfrac{\partial z(B)}{\partial y} = \dfrac{1}{1} + 10.0.1 = 1$.

Parciální derivace vyšších řádů

V předchozí kapitole jsme zadanou funkci $z = f(x,y)$ derivovali vždy pouze jednou. Vypočítali jsme proto parciální derivace prvního řádu. Vypočítané parciální derivace však jsou opět funkcemi proměnných *x*, *y*. Můžeme je tedy stejně jako v případě funkce jedné proměnné znovu derivovat a získáme celkem čtyři parciální derivace druhého řádu:

- Zápis $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}$ znamená, že první parciální derivaci $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ znovu derivujeme podle proměnné *x* a čteme druhá parciální derivace funkce *z* podle proměnné *x*. Podobně zápis $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}$ znamená, že $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ derivujeme podle proměnné *y* a čteme druhá parciální derivace funkce *z* podle proměnné *y*. Derivace $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ a $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ se nazývají **druhé čisté parciální derivace** funkce *z*(*x*, *y*), protože při jejich výpočtu se nemění proměnná, podle které derivujeme.
- Zápis $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$ znamená, že první parciální derivaci $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ znovu derivujeme podle proměnné *y* a čteme druhá parciální derivace funkce *z* podle proměnných *x* a *y*. Podobně $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$ znamená, že $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ znovu derivujeme podle proměnné *x* a čteme druhá parciální derivace funkce *z* podle proměnných *y* a *x*. Derivace $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ a $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ se nazývají **druhé smíšené parciální derivace** funkce *z*(*x*, *y*), protože při jejich výpočtu derivujeme jednou podle proměnné *x* a podruhé podle proměnné *y*.

Příklad 6.7: Určete parciální derivace druhého a třetího řádu funkce $z = 2 - 3x^2 + \ln y + 5xy^2$.

4. Tečná rovina a normála

Tečná rovina τ k ploše $z = f(x,y)$ je určena bodem dotyku $T = [x_0, y_0, z_0]$ a tečnami k řezům plochy $z = f(x,y)$ rovinami $x = x_0$ a $y = y_0$. Tedy, pro libovolný bod $X = [x, y, z]$ roviny τ platí

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & z'_x(T_0) \\ 0 & 1 & z'_y(T_0) \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

tedy, $\tau : z - z_0 = z'_x(T_0)(x - x_0) + z'_y(T_0)(y - y_0)$.

Normála je přímka, která je kolmá k tečné rovině a prochází bodem dotyku *T*. Její směrový vektor z tedy $\vec{n} = (z'_x(T_0), z'_y(T_0), -1)$.

5. Extrémy funkce více proměnných

Extrémy funkce více proměnných jsou definovány analogicky jako extrémy funkce jedné proměnné. Stejně jako u funkce jedné proměnné je rozdělujeme na lokální nebo také relativní (v okolí daného bodu) a globální nebo také absolutní (v celém definičním oboru).

Pro funkci $z = f(x,y)$ musí být tečná rovina k ploše $z = f(x,y)$ v bodě, v němž nastane lokální extrém rovnoběžná s rovinou určenou osou *x* a osou *y*. To ale znamená, že všechny tečny v tomto bodě musí ležet v rovině rovnoběžné s osou *x* a osou *y*, protože leží v tečné rovině k ploše.

Nutnou podmínkou existence lokálního extrému funkce $z = f(x,y)$ v bodě *S*, v jehož okolí má tato funkce spojité parciální derivace, je tedy platnost soustavy rovnic

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

Tento bod *S* se nazývá *stacionární bod* funkce $z = f(x,y)$

Postačující podmínka pro existenci lokálního extrému ve stacionárním bodě *S*: Nechť bod S je stacionárním bodem funkce $z = f(x, y)$, která má v tomto bodě spojité parciální derivace druhého řádu.

$$J(S) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(S)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(S)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(S)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(S)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Jestliže platí

→ $J(S) > 0$ a $f''_{xx}(S) > 0$, potom v bodě S nastává **lokální minimum**.

→ $J(S) > 0$ a $f''_{xx}(S) < 0$, potom v bodě S nastává **lokální maximum**.

→ $J(S) < 0$, potom v bodě S nenastává **lokální extrém**.

→ $J(S) = 0$, potom o extrému v bodě S musíme rozhodnout na základě chování funkce v okolí bodu S.

Při určování lokálních extrémů funkce dvou proměnných je vhodné dodržovat následující postup:

1. Určíme první parciální derivace funkce.
2. Vypočítáme stacionární body S_1, S_2,… funkce podle (4) vyřešením soustavy:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad (6)$$
3. Vypočítáme druhé parciální derivace funkce.
4. Vypočítáme determinant $J(S_1)$ z rovnice (5) pro stacionární bod S_1.
5. Na základě postačující podmínky rozhodneme o existenci a druhu extrému.
6. Body 4 a 5 opakujeme pro zbývající stacionární body.

Příklad 6.12: Určete lokální extrémy funkce $z = f(x, y) = 2y^3 + x^2 y + x^2 + 5y^2$.

Vázané extrémy