Určování lokálních extrémů funkce $F(x, y)$

Příklad. $F : z = \mathrm{e}^{y-x} \cdot (x^2 + y^2)$ **(Sbírka úloh, kapitola 7.4., s. 85, př. 9.l)**

Nutnou podmínkou existence extrému je, že první parciální derivace

$$z'_x = \mathrm{e}^{y-x} \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2) + \mathrm{e}^{y-x} \cdot 2x,$$
$$z'_y = \mathrm{e}^{y-x} \cdot (x^2 + y^2) + \mathrm{e}^{y-x} \cdot 2y,$$

jsou rovny nule. Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\mathrm{e}^{y-x} \cdot (-x^2 - y^2 + 2x) = 0,$$
$$\mathrm{e}^{y-x} \cdot (x^2 + y^2 + 2y) = 0,$$

kde výraz $\mathrm{e}^{y-x} \neq 0$ pro všechna $x, y \in D = \mathbb{R}^2$. Můžeme jím tedy vydělit. Vzniklou soustavu

$$\begin{aligned} -x^2 - y^2 + 2x &= 0, \\ x^2 + y^2 + 2y &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

řešíme sčítací metodou. Sečtením obou rovnic dostáváme, že $2y + 2x = 0$, tedy

$$y = -x. \tag{2}$$

Dosazením do první rovnice v (1) dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} -x^2 - (-x)^2 + 2x &= 0, \\ 2x^2 - 2x &= 0, \\ 2x(x - 1) &= 0, \end{aligned}$$

která má dvě řešení $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Zpětným dosazením do (2) dopočítáme, že $y_1 = 0$, $y_2 = -1$. Výsledkem jsou dva stacionární body, jejichž souřadnice jsou

$$B_1 = [0, 0], \qquad B_2 = [1, -1].$$

Dále spočítáme druhé derivace,

$$z'_{xx} = \mathrm{e}^{y-x} \cdot (x^2 + y^2 - 4x + 2),$$
$$z'_{xy} = \mathrm{e}^{y-x} \cdot (-x^2 - y^2 + 2x + 2y),$$
$$z'_{yy} = \mathrm{e}^{y-x} \cdot (x^2 + y^2 + 4y + 2).$$

Dosazením stacionárního bodu B_1 dostaneme Hesseho matici

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Její determinant (Hessián) je $|H_1| = 4$, a z nerovnosti $|H_1| > 0$ vyvozujeme, že funkce $F(x, y)$ **má v bodě B_1 extrém**. Jelikož $z'_{xx}(B_1) > 0$ jde o **lokální minimum**.
Analogicky, dosazením stacionárního bodu B_2 dostaneme

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2}{\mathrm{e}^2} \\ \dfrac{2}{\mathrm{e}^2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad |H_2| = -\left(\frac{2}{\mathrm{e}^2}\right)^2.$$

Jelikož je $|H_2| < 0$, tedy funkce $F(x, y)$ **nemá v bodě B_2 extrém**.