Typové příklady ke zkoušce z Matematiky I

Funkce a diferenciální počet:

1. Sestrojte graf funkce $y = \left|\tan\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)\right| - 1$. Dále určete její $D(f)$, $H(f)$ a rozhodněte zda je to funkce sudá, lichá, periodická (případně určete její periodu) a prostá.

2. Rozhodněte zda k funkci $f: y = 2 \cdot \arcsin(2 + x) - 6$ existuje funkce f^{-1}. Pokud ano, vypočítejte její předpis a určete definiční obory $D(f)$ a $D(f^{-1})$.

3. Určete maximální interval, na kterém je funkce $f: y = 4 \cdot \cos(2x)$ rostoucí a prostá. Na tomto intervalu nalezněte předpis inverzní funkce f^{-1} a určete její definiční obor $D(f^{-1})$.

4. Rozhodněte, která z daných funkcí je sudá, případně lichá:

   a) $y = \dfrac{x^4 - 1}{2 + x^2}$, b) $y = \dfrac{e^{-x}}{2x}$,

   c) $y = 5\sin 3x - 2\operatorname{cotg} 2x$.

5. Vypočítejte limity v krajních bodech intervalů definičního oboru funkce

   $f: y = \dfrac{2\ln x}{x - 1}$.

   (Zjistěte zda je funkce *f* ohraničená.)

6. Určete všechny asymptoty grafu funkce $f: y = 1 + x + \dfrac{4}{x^2}$.

7. Určete definiční obor funkce

   $f: y = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 2}}$,

   spočítejte $f'(x)$ a konečně určete $D(f')$.

8. Vypočítejte první, druhou a třetí derivaci funkcí:

   a) $y = \ln(\tan^2 x)$, b) $y = e^{\sin x - \cos x}$.

9. Vypočítejte rovnici tečny a normály ke křivce $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ v bodě T[1, ?].

10. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f: y = -2x^2 + 4x + 1$ v bodě $T = [\frac{3}{2}, ?]$. Zakreslete funkci i tečnu do roviny a spočítejte úhly, které svírá tečna se souřadnicovými osami.

11. Spočítejte rovnici tečny ke grafu funkce

    $f: y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{1 + \sqrt{x}}$

    v průsečíku grafu s osou *x*.

12. Metodami diferenciálního počtu nalezněte všechny lokální extrémy funkce $y = x^3 - x^2 - x + 12$.

13. Metodami diferenciálního počtu rozhodněte, má-li funkce $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 5x + 7$ inflexní body. Dále nalezněte intervaly, na kterých je konvexní (resp. konkávní).

14. Nalezněte **globální** extrémy funkce
$f : y = x - \dfrac{1}{x+1}$ na intervalu $I = \langle -4, -1)$.

Algebra a analytická geometrie:

1. Vypočítejte všechna řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x \quad\;\; + z - t &= 4 \\ x + y \quad - 2t &= -2 \\ 2y + z + 3t &= 3 \end{aligned}$$

2. Vypočítejte determinant matice A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Rozhodněte, zda k dané matici existuje matice inverzní.)
(Rozhodněte zda je matice regulární.)

3. Určete hodnost matice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}.$$

4. Vyřešte maticovou rovnici $B \cdot X = C$, kde

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vyřešte maticovou rovnici $X \cdot B = C$.

5. Rozhodněte zda k zadané matici A existuje inverzní matice. Pokud ano, vypočítejte ji.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -10 \\ 2 & -4 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Tvoří vektory $\vec{\mathbf{v}}_1 = (-1,3,-2,4)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (2,5,1,3)$, $\vec{\mathbf{v}}_3 = (5,-4,7,-8)$ a $\vec{\mathbf{v}}_4 = (3,2,6,-8)$ bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$?

7. Jsou zadány tři body $A = [0;\ 0;\ 3]$, $B = [3;\ 4;\ 1]$, $C = [-1;\ -2;\ 1]$ v Euklidovském prostoru E_3.
(a) Napište parametrické vyjádření a obecnou rovnici roviny ρ, která je těmito třemi body určena.
(b) Určete dále vzdálenost bodu $M = [9; 0; 2]$ do roviny ρ.
(c) Spočítejte odchylku roviny ρ od osy x.
(d) Vypočítejte velikost úhlu γ.
(e) Spočítejte obsah $\Delta\ ABC$.

8. Napište obecnou rovnici roviny ρ, která prochází přímkou p a je rovnoběžná s přímkou q:

$$p \equiv \begin{cases} 5x + y + z + 6 = 0, \\ x - 3y + z = 2, \end{cases} \qquad q\ :\ x = 5 - t,\ y = 1 - 2t,\ z = t,\ \ t \in \mathbb{R}$$

Spočítejte dále odchylku roviny ρ od osy z.

9. Jsou zadány dvě roviny $\rho : 5x + y - 3z = 5$ a $\sigma : 2x - 19y - 3z - 20 = 0$ v Euklidovském prostoru E_3.
(a) Vyjádřete průsečnici rovin ρ a σ.
(b) Spočítejte odchylku rovin ρ a σ.
(c) Spočítejte vzdálenost bodu $M = [7, -6, -9]$ od roviny σ.

10. V Euklidovském prostoru E_3 rozhodněte o vzájemné poloze přímek p: AB a q: $X = C + s \cdot \boldsymbol{v}$, kde $A = [8;\ 4;\ 0]$, $B = [4;\ 12;\ -12]$, $C = [3;\ 1;\ -2]$ a $\boldsymbol{v} = (3;\ -6;\ 9)$. Napište souřadnice případných společných bodů a spočítejte odchylku směrových vektorů přímek p a q.

11. Jsou zadány body $A = [4; 0; -2]$ a $B = [5; 1; -3]$ v Euklidovském prostoru E_3.
(a) Napište obecnou rovnici roviny ρ, která prochází těmito dvěma body a je rovnoběžná s osou x.
(b) Určete dále kolmý průmět bodu $M = [9; 0; 2]$ do roviny ρ a $v(M, \rho)$.
(c) Spočítejte odchylku přímky AM od roviny ρ.

12. (a) Převeďte implicitní vyjádření přímky p

$$p : \begin{cases} x + 2y - z - 9 = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

na parametrické rovnice.
(b) Určete dále vzájemnou polohu přímky p a roviny $\alpha : 2x - y - z - 6 = 0$.
(c) Leží bod $A = [-3; 6; 0]$ na přímce p? Jaká je vzdálenost $v(A, \alpha)$?

13. Napište parametrické rovnice přímky k, která prochází bodem $A = [-3; 16; -5]$ a je kolmá na rovinu $\alpha : 3x + 5y - 4z + 9 = 0$.
(a) Určete souřadnice kolmého průmětu bodu A do roviny α.
(b) Spočítejte $v(A, \alpha)$.